① Основные понятия об ОДУ и системах ОДУ. Опис. мат моделей движ. точки и моделей динам. популяций

Опр диф. ур-е — ур-е, содержащее производные некот. ф-ции

Опр ОДУ — ур-е, содерж. произв. неизв ф-ции только по 1 независ перем.

Опр. ДУ в частн. произв — ур-е, содерж. производн. неизв. ф-ции по неск. независ. перемен

Опр: Порядок ДУ — наиб порядок входящ. в него производн

Опр: ОДУ 1-го пор — $F(t, y(t), y'(t)) = 0$, $t \in [a, b]$

Опр: ОДУ n-го пор — $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$, $t \in [a, b]$ (1.1)

Опр: ОДУ n-го пор, разр. отн старш. произв: $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, $t \in [a, b]$

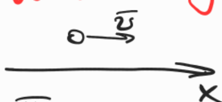
Опр:] ∃ $f_i = (t, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$ Норм сист ОДУ отн неизв ф-ций наз:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

Опр: ф-ция $y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ наз реш. ОДУ $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, если:

1) $y(t) \in C^n[t_1, t_2]$
2) Подстан. $y(t)$ в $F(t, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ превращ. его в тождество

Мат мод. движ точки:



] сила, действ на точку — $f(t)$; полож. точки — $x(t)$

II зак. Ньютона — $a(t) = f(t)$, т.е $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$ — ОДУ 2-го порядка

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \int_{\tau_0}^{\tau} f(\theta) d\theta d\tau + a + at$$

] $C_1 = x_0$ — нач. полож, $C_2 = U_0 = x'(t_0)$ — нач скор ⇒ в этом сл полож. точки опр однозначно

Если f завис не только от t, но и от $x(t)$ и $V(t)$, то ОДУ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, x')$$

Δ движ. мат точки в пр-ве: $\bar{r}(t) = (x, y, z)$ — рад. вект. точки.

$\bar{f}(t, \bar{r}(t)) = (f_1(t, \bar{r}, \bar{r}'), f_2(\dots), f_3(\dots))$ $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = f(t, \bar{r}, \bar{r})$

Запишем покомпонентно:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ \dots \\ \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(\dots) \end{cases}$$

, где $f_i(t, x, y, z, x', y', z')$ — зад. ф-ция 7ми перемен.

Мат модель популяции:

Δ модель, описыв изменение численности биологич объектов 2-х видов: жертв и хищников. $\exists\, U(t)$ – кол-во жертв, $V(t)$ – хищ. $\exists\, U(t), V(t)$ – непрер. диф. $\exists$ скорость рожд жертв $\sim$ их кол-ву, а скор. рожд хищ. $\sim$ произведению кол-ва хищ. на кол-во жертв

$$U'(t) = aU(t) - bU(t)V(t) \leftarrow \text{скорость. смертности}$$

$$V'(t) = cU(t)V(t) - dV(t)$$

Получ. норм. сист ОДУ $\Rightarrow$ для однозн. опр. числ. жертв и хищ. необход. знать кол-во жертв и хищ. в некот. мом. времени t_0: $(U(t_0), V(t_0))$

② ОДУ в сим. виде. Общ. интеграл. Ур-е в полн. диф (УПД)
Теор. об общ. инт УПД. Теор о необх и дост усл УПД

Опр: ОДУ в сим. виде наз ур-е:

$$M(t,y)dt + N(t,y)dt = 0 \quad , \text{где } M, N \subset C(D),\ D \subset \mathbb{R}^2,\ |M|+|N|>0 \ \forall (t,y) \in D$$

Опр: Пара $t=\varphi(\tau)$, $y=\psi(\tau)$ наз параметрич. реш ОДУ в сим. виде на $[\tau_1, \tau_2]$, если:

1) $\varphi, \psi \in C^1[\tau_1, \tau_2]$
2) $(\varphi, \psi) \in D \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$
3) $M(\varphi,\psi)\varphi' d\tau + N(\varphi,\psi)\psi' d\tau \equiv 0$ на $[\tau_1,\tau_2]$
4) $|\varphi'| + |\psi'| > 0 \quad \forall \tau \in [\tau_1, \tau_2]$

Опр: Интеграл ур-я в сим виде — $A(x,y,c)=0$, $C \in C_0 \subset \mathbb{R}$, если $\forall C \in C_0$ это ур-е задает неявно реш. ОДУ (в сим. виде)

Опр: Если инт. задаёт все реш ОДУ в сим виде, то он наз общ. инт

Опр: Ур-е в сим. виде наз УПД в обл. D, если $\exists$ непр. диф в D ф-ция $v(t,y)$: $|v'_t(t,y)| + |v'_y(t,y)| > 0$ и $M(t,y) = v'_t(t,y)$, $N(t,y) = v'_y(t,y)$

Теор: УПД имеет ОИ вида $v(t,y)=C$, где $C \in$ (обл. зн. v на D)

Идея $Mdt + Ndy = 0$ — УПД $\Rightarrow v'_t dt + v'_y dy = 0 \Leftrightarrow dv = 0 \Leftrightarrow v = const$

▷ 1) Докажем, что $v(t,y)=C$ — инт. Д $\forall \tilde{c} \in E(v)$ $\exists (t_0, y_0)$: $v(t_0,y_0) = \tilde{c}$. По опр. либо $v'_y(t_0,y_0) \neq 0$, либо $v'_t(t_0,y_0) \neq 0$, либо обе $\neq 0$ $\quad \exists\, v'_y(t_0,y_0) \neq 0$

По теор о неявно зад ф-ции $\exists$ ф-ция $y=\psi(\tau)$, $\tau \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, $\varepsilon>0$: $v(\tau, \psi(\tau)) \equiv \tilde{c}$ на $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, причем $\psi(\tau) \in C^1[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ и ед.

Тогда $0 \equiv d\tilde{c} \equiv d(v(\tau,\psi(\tau))) \equiv v'_t(\tau,\psi(\tau))d\tau + v'_y(\tau,\psi(\tau))\psi'(\tau)d\tau \equiv$
$\equiv M(\tau,\psi(\tau))d\tau + N(\tau,\psi(\tau))\psi'(\tau)d\tau$ на $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$, т.е по опр. пара $(t,y) = (\tau, \psi(\tau))$ — реш. ОДУ в сим. виде. Если $v'_t(t_0,y_0) \neq 0$, то реш. — $t=\varphi(\tau)$, $y=\tau$. Т.е $v(t,y)=C$, $C \in E(v)$ — интеграл.

2) $\exists\, t=\varphi(\tau)$, $y=\psi(\tau)$ — парам. реш. ОДУ в сим. виде на $[\tau_1,\tau_2] \Rightarrow$
$0 \equiv M(\varphi(\tau),\psi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau + N(\varphi,\psi)\psi' d\tau \equiv v'_t(\varphi,\psi)\varphi' d\tau + v'_y(\varphi,\psi)\psi' d\tau \equiv$
$\equiv d(v(\varphi,\psi)) \Rightarrow \exists \tilde{c} \in E(v)$: $v(\varphi,\psi) = \tilde{c}$ на $[\tau_1,\tau_2] \Rightarrow v(t,y)=C$ — ОИ □

Критерий УПД: $\exists$ в $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ $D=\{|t-t_0|<A, |y-y_0|<B\}$ и $M,N\in C^1(D)$. Тогда $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ – УПД $\Rightarrow M'_y\equiv N'_t$ в D

$\triangleright$ $(\Rightarrow)$ $M,N\in C^1(D)\Rightarrow v\in C^2(D)\Rightarrow v''_{ty}=v''_{yt}\Rightarrow M'_y=N'_t$ в D

$(\Leftarrow)$ $v(t,y)=\int_{t_0}^{t}M(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(t_0,\xi)d\xi$, где (t_0,y_0) – $\forall$ точка D

$$\left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}f(x,z)dx\right)'_z=\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)}f'_z(x,z)dx+\beta'(z)f(\beta(z),z)-\alpha'(z)f(\alpha(z),z)$$

$$v'_t=\left(\int_{t_0}^{t}M(\xi,y)d\xi\right)'_t=t'_tM(t,y)=M(t,y)$$

$$v'_y=\int_{t_0}^{t}M'_y(\xi,y)d\xi+y'_yN(t_0,y)=\int_{t_0}^{t}N'_\xi(\xi,y)d\xi+N(t_0,y)=N(\xi,y)\Big|_{t_0}^{t}+$$

$$+N(t_0,y)=N(t,y)$$

$\Rightarrow$ вып. все усл из опр УПД $\square$

③ Задача Коши для ОДУ 1-го пор, разр. относ. производ. Лемма Гронуолла – Беллмана. Теор о ед. реш. ЗК.

Опр ЗК для ОДУ 1-го порядка, разреш. относ производн. $y' = f(t,y)$ наз:
$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, $(t,y) \in \Pi = \{|t-t_0| < T, |y-y_0| \le A$, где $t_0, y_0, T, A = const\}$

Опр: ф-ция $f(z)$ удовл. усл. Липшица на $[a,b]$, если $\exists L = const > 0$:
$|f(z_1) - f(z_2)| \le L|z_1 - z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in [a,b]$

Св-ва:

1) Липш. ⇒ непрер: ▷ $z_1 \to z_2 \Rightarrow f(z_1) \to f(z_2)$ □

2) Если $\exists f'(z)\ \forall z \in [a,b]$, и $\max(f'(z)) \le M = const$ на $[a,b]$, то $f(z)$ – липш
▷ $f(z_1) - f(z_2) = f'(\xi)(z_1 - z_2)$, $L = M$ □

3) $|x|$ не диф, но липш. на $[-1,1]$ ▷ $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$, $L = 1$ □

4) $z^{2/3}$ непр, но не липш на $[-1,1]$
▷ Пусть $\exists L > 0$: $|f(z_1) - f(z_2)| \le L|z_1 - z_2|\ \forall z_1, z_2 \in [-1,1]$
Пусть $z_2 = 0$, $z_1 \in (0, 1/L^3)$, напр $z_1 = 1/8L^3 \Rightarrow \sqrt[3]{(1/8L^3)^2} \le L \cdot \frac{1}{8L^3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1/4L^2 \le 1/8L^2 \Leftrightarrow 1/4 < 1/8$ – противореч □

5) Пусть f – липш. на $[a, +\infty) \Rightarrow \exists c > 0$: $|f(z)| \le c\,z$
▷ Пусть $z_2 = a$, $z_1 \gg 1$. $|f(z_1) - f(a)| \le L|z_1 - a| = Lz_1 - La$. Если f – огр, то $|f(z_1) - f(a)|$ – огр, а z_1 – неогр ⇒ при $z_1 \gg 1$ нер-во вып ⇒ $|f(z_1)| \le$
$\le C_1|f(z_1) - f(a)| \le LC_1 z_1 + LC_1 a_1 \le C_2 z_1$
Если f – неогр, то при $z_1 \gg 1$ $|f(z_1)| > f(a) \Rightarrow |f(z_1)| \le Lz_1 + f(a) - La \le C_3 z_1$ □

Лемма Гронуолла – Белмана: Пусть $z(t) \in C[t_1, t_2]$ и выполн:
$0 \le z(t) \le c + b\left|\int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|$, где $c, b = const$, $c > 0, b > 0$; $t, t_0 \in [t_1, t_2]$ Тогда
$z(t) \le c \cdot \exp(b|t - t_0|)$

▷ 1) $t \ge t_0$: Обозн $p(t) = \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau$. Тогда $p'(t) = z(t)$ и $p(t_0) = 0$ и
$p'(t) \le c + b p(t) \quad | \cdot \exp(-b(t - t_0))$
$p'(t)\exp(-b(t-t_0)) - bp(t)\exp(-b(t-t_0)) \le c\exp(-b(t-t_0)) \Rightarrow$
$(p(t)\exp(-b(t-t_0)))'_t \le c\exp(-b(t-t_0))$
$\int_{t_0}^{t}(p(\tau)\exp(-b(\tau - t_0)))'_\tau d\tau \le \int_{t_0}^{t} c\exp(-b(\tau - t_0))d\tau$; $p(t)\exp(-b(t-t_0)) - p(t_0) \le$
$\le -\frac{c}{b}(\exp(-b(t - t_0)) - 1)$

$p(t)\leq -\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\exp(b(t-t_0))\Rightarrow z(t)\leq c+b\cdot p(t)\leq c-c+c\cdot\exp(b(t-t_0))=c\exp(b(t-t_0))$

2) $t\leq t_0$. $\exists\, p(t)=-\int_{t_0}^{t}z(\tau)d\tau$. $\Rightarrow z(t)=-p'(t)\Rightarrow -p'(t)\leq c+p\cdot bp(t)$ и анал, но t_0-t $\square$

Теор. о ед. реш ЗК для ОДУ 1-го пор, разреш. отн. производн.

$\exists$ в опр. ЗК: $\begin{cases} y'_t=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0\end{cases}$ $(t,y)\in\Pi=\{|t-t_0|\leq T, |y-y_0|\leq A\}$

$f(t,y)\in C(\Pi)$ и удовл. усл. Липшица по y с конст $L>0$. Тогда если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — реш. на $\{|t-t_0|\leq T\}$, то $y_1(t)\equiv y_2(t)$ на $\{|t-t_0|\leq T\}$

$\triangleright$ **Лемма о редукции к инт ур-ям:**

$\exists f(t,y)\in C(\Pi)$, $y\in C[t_0-T,t_0+T]$, $|y(t)-y_0|\leq A$, $\forall t\in[t_0-T,t_0+T]$.

Тогда $y(t)$ - реш. ЗК $\Leftrightarrow$ $y(t)$ - реш $(*)$, где $(*)$: $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,y(\tau))d\tau$

$\triangleright$ $\Rightarrow$ $y(t)$ - реш. ЗК $\Rightarrow$ по опр $y\in C^1[t_0-T,t_0+T]$, $|y(t)-y_0|\leq A, \forall t\in[t_0-T,t_0+T]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно проинтегрир. ур-е $y'(t)=f(t,y(t))$

$\int_{t_0}^{t}y'(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}f(\tau,y(\tau))d\tau$; $y(t)-y(t_0)=\int_{t_0}^{t}f(\tau,y(\tau))d\tau$

$\Leftarrow$ $y(t)\in C[t_0-T,t_0+T]\Rightarrow f(t,y)$ — тоже непр $\Rightarrow$ $\int_{t_0}^{t}f(\tau,y)d\tau\in C^1[t_0-T,t_0+T]\Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)$ в $(*)$ тоже из $C^1[\ldots]$. Диф $(*)$ $y'=f(t,y)$. Очев $y(t_0)=y_0$ в $(*)$ $\square$

По лемме: $y_k(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,y(\tau))d\tau$ $(k=\overline{1,2})$. Тогда $\sphericalangle\ |y_1-y_2|$:

$|y_1-y_2|=|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,y_1)-f_2(t,y_2))d\tau|\leq|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,y_1)-f(\tau,y_2)|d\tau|\leq\{$усл Липш$\}\leq$

$\leq L|\int_{t_0}^{t}|y_1(\tau)-y_2(\tau)|d\tau|$. Применим лемму Гронуолла-Беллмана при $z(t)=|y_1-y_2|$, $c=0$, $b=L$. Получим: $|y_1(t)-y_2(t)|\leq 0\cdot\exp(L|t-t_0|)=0$

т.е. $y_1(t)\equiv y_2(t)$ $\square$

④ Теор о ∃ реш ЗК для ОДУ 1-го пор, разреш. отн. произв.

Теор:] в опр ЗК $f(t,y) \in C(\Pi)$ и удовл. усл. Липш. с конст L, причем $\max\limits_{\Pi}|f| = M$. Тогда на $[t_0-h, t_0+h]$, где $h = \min\{T, \frac{A}{M}\}$ (A из опр П) ∃ реш. ЗК

Идея: ∢ посл (#): $y_0(t) = y_0$, $y_k(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_{k-1}(\tau))d\tau$, $k \in \mathbb{N}$ и покаж, что посл. равном сход к $y(x)$ — реш ЗК

▷ 1) Покажем, что $|y_k(t) - y_0| \leq A \ \forall |t - t_0| \leq h$ и $y_k(t) \in C^1[t_0 - T, t_0 + T]$ $k = \overline{0 \ldots}$

По индукции: $|y_0 - y_0| \leq A$, $y_0 \in C[t_0 - h, t_0 + h]$

] верно для $y_k(t) \Rightarrow |y_{k+1} - y_0| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_k(\tau))|d\tau| \leq$
$\leq |\int_{t_0}^{t} M d\tau| = M|t - t_0| \leq Mh \leq A$

$y_k \in C \Rightarrow f(t, y_k(t)) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$

$|y_k - y_0| \leq A \Rightarrow y_{k+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_k(\tau))d\tau \in C[t_0 - h, t_0 + h]$

2) $|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq AL^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$ $k = \overline{0, \ldots}$ По инд: $|y_1 - y_0| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau, y_0)d\tau| \leq$
$\leq |\int_{t_0}^{t} M d\tau| = M|t - t_0| \leq Mh \leq A$

] верно для $|y_k - y_{k-1}| \Rightarrow |y_{k+1} - y_k| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(\tau, y_k(\tau)) - f(\tau, y_{k-1}(\tau))|d\tau| \leq$
$\leq L|\int_{t_0}^{t} |y_k - y_{k-1}|d\tau| \leq L|\int_{t_0}^{t} AL^{k-1} \frac{|\tau - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = AL^k \frac{|t-t_0|^k}{k!}$

3) ∢ $\{y_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Очев, что $y_k(t) = y_0 + \sum\limits_{m=1}^{k}(y_m - y_{m-1})$, поэтому исслед $\{y_k\}$ на р/н сх ~ иссл. на р/н сход ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(y_m - y_{m-1})$

Этот ряд на $[t_0 - h, t_0 + h]$ мажорируется числ. рядом $\sum\limits_{m=1}^{\infty} AL^{m-1}\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}$, который сход по Даламберу: $\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{Lh}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

Таким образом, $\{y_k(t)\}_{k=0}^{\infty} \underset{[t_0-h, t_0+h]}{\rightrightarrows} y(t) \Rightarrow y(t) \in C[t_0 - h, t_0 + h]$. Перейдя к пределу в нер-ве $|y_k(t) - y_0| \leq A$ получим: $|y(t) - y_0| \leq A \ \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$

Для ⇉ посл. можно переходить к пределу под знаком интегрир и "знаком" непр. ф-ции. Тогда, переходя к пределу в (#) $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau \Rightarrow$ по лемме Гронуолла - Беллмана: $y(t)$ - реш ЗК на $[t_0 - h, t_0 + h]$ □

⑤ ОДУ 1-го пор, не разрем. отн. произв. Теор. о $\exists!$ рем ЗК. Особ. рем ур-я 1-го порядка, примеры:

Опр: ОДУ 1-го пор, не разрем. отн. произв: нельзя представ $y'=f(t,y)$

Опр: ЗК для ОДУ, не разрем. отн. производн:

$$\begin{cases} f(t,y,y')=0 \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=p_0 \end{cases} \quad f(t,y,p)\in C(D),\ D=\{|t-t_0|\le T, |y-y_0|\le A, |p-p_0|\le B\}$$

Замеч: в ЗК для $y'=f(t,y)$ нет смысла ставить усл на $y'(t_0)$ т.к. задание $y_0=y(t_0)$ однозн. задает $y'(t_0)=f(t_0,y_0)$

Теор о $\exists!$ рем. ЗК: Пусть в опр ЗК:

1) $f(t_0,y_0,p_0)=0$ 2) $f(t,y,p), f'_y(t,y,p), f'_p(t,y,p)\in C(D)$

3) $f'_p(t_0,y_0,p_0)\ne 0$

Тогда $\exists h>0, h\le T$: ЗК имеет ед рем., опр на $[t_0-h, t_0+h]$

Идея: в усл теор вып. все усл. теор о неявно зад. ф-ции $p=g(t,y)$, т.е $\exists$ окр Ω точки (t_0,y_0,p_0), $\Omega\subset D$: ур-е $f(t,y,p)=0$ однозн. разрешимо относ p, причём $g(t,y)$ непр при $(t,y,p)\in\Omega$. Тогда можно $\triangle$ $\begin{cases} y'=g(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ и доказ, что её рем $\exists!$ и явл рем ЗК для ОДУ, не разр отн пр.

Д $\triangle$ $\begin{cases} y'=g(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$ (*) Т.к $f'_p\in C(D)$ и $f'_p(t_0,y_0,p_0)\ne 0$, то $\exists\Omega\subset D$, $(t_0,y_0,p_0)\in\Omega$: $f'_p(t,y,p)\ne 0$ $\forall(t,y,p)\in\Omega \Rightarrow g'_y(t,y)=-f'_y(t,y,p)/f'_p(t,y,p)\in C(\Omega_0)$

$\triangle$ (*) при $(t,y,p)\in D_0=\{|t-t_0|\le a, |y-y_0|\le b, |p-p_0|\le c\}\subset\Omega_0\cap\Omega$

Тогда $g'_y(t,y)$ огр на $D_0 \Rightarrow$ удовл усл. Липш. по y в $D_0 \Rightarrow$ вып все усл теор о $\exists$ рем ЗК и теор о ! ЗК для ОДУ 1-го пор, разр. отн. пр. $\Rightarrow \exists h>0$: $h<a$ на $[t_0-h, t_0+h]$ $\exists!$ рем (*). Тогда $\exists$ рем ЗК для ОДУ 1-го пор, не разрем отн. произв, т.к. $f(t,y(t),g(t,y))\equiv 0$ при $|t-t_0|\le h$ по теор. о неявной ф-ции, $y(t_0)=y_0$ по постр и $y'(t_0)=g(t_0,y_0)=p_0$, т.к $f(t_0,y_0,g(t_0,y_0))=0$. ! след из ед ф-ции $p=g(t,y)$ $\square$

Опр: Ф-ция $y=\varphi(t)$ наз особ рем ур-я $f(t,y,y')=0$ на $[t_1,t_2]$, если $\forall t\in[t_1,t_2]$ $\exists y=\varphi_0(t)$ – еще одно рем этого же ур-я:

1) $\varphi(t_0)=\varphi_0(t_0)$, $\varphi'(t_0)=\varphi'_0(t_0)$

2) $\forall\delta>0$: $\varphi(t)\ne\varphi_0(t)$ в $[t_0-\delta, t_0+\delta]$

Опр (альтерн.) Особ реш – реш, график котор в кажд точке кас график. какого-либо др. реш. этого же ОДУ

Пример: В ур-е $y' = 3\sqrt[3]{y^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=(t+c)^3 \\ y=0 \end{array}\right.$ все реш. явл частн. (графика котор ни в одной точке не кас график какого-либо др. реш этого ОДУ)

В $\mathbb{R}^2$ $y=0$ явл особ реш, а частных нет

Если ОДУ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=t+c \\ y=0 \end{array}\right.$  , то все его реш. частные

⑥ Норм. сист ОДУ. Теор. о единств реш ЗК для нормальной системы ОДУ n-го порядка

Опр: Система ОДУ вида:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$ относ. иском. ф-ций $y_1(t), \dots, y_n(t)$ наз норм сист ОДУ

Опр: $f(t, \bar{y})$ удовл усл Липш по $\bar{y}$ на $\{t \in [a,b], \bar{y} \in D_n \subset \mathbb{R}^n\} = D$ с конст L, если $|f(t, \tilde{\bar{y}}) - f(t, \hat{\bar{y}})| \leq L(|\tilde{y}_1 - \hat{y}_1| + \dots + |\tilde{y}_n - \hat{y}_n|)$

Опр: ЗК для норм сист ОДУ:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(y_1, \dots, y_n) \\ y_1(t_0) = y_{01} \\ \dots \\ y_n(t_0) = y_{0n} \end{cases}$$ $f_i(t, \bar{y}) \in C(D_n)$, $D_n = \{t \in [a,b], \bar{y} \in \mathbb{R}^n\}$, $t_0 \in [a,b]$

Или: $$\begin{cases} \bar{y}' = f(t, \bar{y}) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

Теор о ! ЗК для норм сист ОДУ n-го порядка:

Пусть в опр ЗК для норм сист ОДУ $f_i(t, \bar{y}) \in C(D)$ и удовл усл Липш. по $\bar{y}$ в D с конст. L_i. Тогда если $\tilde{\bar{y}}(t)$ и $\hat{\bar{y}}(t)$ явл реш ЗК для норм сист ОДУ на $[a,b]$, то $\tilde{\bar{y}}(t) \equiv \hat{\bar{y}}(t)$

▷ Применяя лемму о редукции (билет 3) к каждому из ур-ий в опр. ЗК для норм сист ОДУ, получим, что:

$\tilde{y}_k(t)$ явл реш $\tilde{y}_k(t) = y_{0k} + \int_{t_0}^{t} f_k(\tau, \tilde{\bar{y}}(\tau)) d\tau$, $k = \overline{1,n}$ $\quad t, t_0 \in [a,b]$

$\hat{y}_k(t)$ явл реш $\hat{y}_k(t) = y_{0k} + \int_{t_0}^{t} f_k(\tau, \hat{\bar{y}}(\tau)) d\tau$, $k = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow |\hat{y}_k - \tilde{y}_k| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f_k(\tau, \tilde{\bar{y}}(\tau)) - f_k(\tau, \hat{\bar{y}}(\tau))| d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} (|\tilde{y}_1(\tau) - \hat{y}_1(\tau)| + \dots + |\tilde{y}_n(\tau) - \hat{y}_n(\tau)|) d\tau \right|$$

, где $k = \overline{1,n}$, $L = \max\limits_{k=\overline{1,n}} L_k$

Пусть $z(t) = \sum\limits_{1}^{n} |\tilde{y}_k(t) - \hat{y}_k(t)| \geq 0$. При суммировании предыдущ. n неравенств. получим: $z(t) \leq nL \left| \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau \right|$. По лемме Гронуолла-Беллмана, в которой $c = 0$, $b = nL$, получим, что $z(t) \equiv 0$, т.е $\tilde{\bar{y}}(t) \equiv \hat{\bar{y}}(t)$ □

⑦ Теор о $\exists$ реш ЗК для норм сист ОДУ на всем отрезке

Пусть в опр ЗК для норм сист $f_k(t,\bar{y}) \in C(D_\infty)$ и удовл усл Липш по $\bar{y}$ в D_∞ с константой L_k, где $D_\infty = \{t \in [a,b], \bar{y} \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда на всем отрезке $[a,b]$ $\exists$ реш. ЗК для норм сист ОДУ

Идея: Д $\{y_k^l(t)\}_{l=1}^{\infty}$, $k=\overline{1,n}$, где $y_k^0(t)=y_{0k}$, $y_k^l(t)=y_{0k}+\int_{t_0}^{t} f_k(\tau,\bar{y}^{l-1}(\tau))d\tau$

Доказывается, что $\{y_k^l(t)\} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} y_k(t)$, $l\to+\infty$, причем $y_k(t)$ удовл всем усл. леммы о редукции (билет 3) и инт ур-ем $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ явл реш ЗК норм сист ОДУ

$\triangleright$ 1) Покажем, по инд, что $y_k^l(t) \in C[a,b]$. $\forall l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$y_k^0(t) = y_{0k} = const \in C[a,b]$

Пусть $y_k^{l+1}(t) \in C[a,b] \Rightarrow y_k^{l+1}(t) = y_{0k} + \int_{t_0}^{t} f_k(\tau,\bar{y}^l(\tau))d\tau \Rightarrow y_k^{l+1}(t) \in C[a,b]$

(как композиция)

2) Покажем, по инд, что $|y_k^{l+1}(t)-y_k^l(t)| \leq BL^l \frac{|t-t_0|^l}{l!}n^l$, где $L=\max\limits_{k=\overline{1,n}} L_k$,

$B=\max\limits_k \max\limits_{[a,b]} |\int_{t_0}^{t} f_k(\tau,\bar{y}_0)d\tau|$

<u>Базис:</u> $|y_k^1(t)-y_k^0(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau,\bar{y}_0)d\tau| \leq B$

<u>Переход:</u> Пусть верно для $|y_k^l(t)-y_k^{l-1}(t)| \leq BL^l \frac{|t-t_0|^l}{l!}n^l$

$$|y_k^{l+1}(t)-y_k^l(t)| \leq |\int_{t_0}^{t} |f_k(\tau,\bar{y}^l(\tau))-f_k(\tau,\bar{y}^{l-1}(\tau))|d\tau| \leq L_k |\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} |y_k^l(\tau)-y_k^{l-1}(\tau)|d\tau| \leq$$

$$\leq L|\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} BL^{l-1} \frac{(t-t_0)^{l-1}}{(l-1)!}d\tau| = \frac{L^l B n^l}{(l-1)!} |\int_{t_0}^{t} |\tau-\tau_0|^{l-1} d\tau| \leq \frac{L^l B n^l}{l!} |t-t_0|^l$$

3) Д ряд $y_k^0(t)+\sum_{l=1}^{\infty}(y_k^l(t)-y_k^{l-1}(t))$, $k=\overline{1,n}$

Тк частичн сумма этого ряда $S_m(t)=y_k^m(t)$, то равномерн. сходимость этого ряда $\Leftrightarrow$ равн. сходим $\{y^l(t)\}_{l=0}^{\infty}$

Ряд сх по Вейерштрассу

Оценив сверху рядом $y_{0k}+\sum_{l=1}^{\infty} BL^{l-1} n^{l-1} \frac{(b-a)^{l-1}}{(l-1)!}$

Таким образом, $\{y_k^l\} \rightrightarrows y_k(t) \in C[a,b]$ и можно перейти с $d\tau$ пределом под знак инт и $\forall$ непрер ф-ции. Тогда $y_k(t) = y_{0k}+\int_{t_0}^{t} f_k(\tau,y(\tau))$ и удовл всем усл леммы о редукции к инт ур-ем (билет 3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ явл реш ЗК для норм сист ОДУ $\square$

⑧ Теор о ∃! реш ЗК для ОДУ n-го пор на всем отрезке

Опр: ЗК для ОДУ n-го порядка, разр отн произв наз:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_{01} \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n} \end{cases}, \text{ где } (t_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D \quad f(t, y, p_1, \dots, p_{n-1}) \in C(D),$$

$D = \{t \in [a, b], (y, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\}$

Теор: Г в опр ЗК $f \in C(D)$ и удовл в D усл Липш по переменным $(y, p_1, \dots, p_{n-1})$. Тогда ∃! реш ЗК, опр при $t \in [a, b]$

▷ Сведем к норм сист: Г $y(t) = y_1(t)$, $y'(t) = y_2(t), \dots, y^{(n-1)}(t) = y_n(t)$. Сл. ЗК:

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \dots \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = f(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_k(t_0) = y_{0k} \quad k = \overline{1, n} \end{cases} \quad (*)$$

По построен: если $y(t)$ – реш исх ЗК, то $(y_1, \dots, y_n)$ – реш $(*)$

Если y_1 – реш $(*)$, то $y(t) = y_1(t)$ облад след св-вами:

$y^{(n)}(t) = y_1^{(n)}(t) = y_n'(t) = f(t, y_1, \dots, y_n) \in C[a, b]$

$y(t_0) = y_1(t_0) = y_{01}$, $y'(t_0) = y_2(t_0) = y_{02}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n(t_0) = y_{0n}$

Таким образом, $(*) \Leftrightarrow$ исх ЗК.

Первые $n-1$ прав. части в $(*)$ непрерыв. и имеют непрерывн частн. производн U_k, равные либо 0, либо 1, т.е эти правые части удовл усл. Липш по $(y_1, \dots, y_n)$. Тогда для $(*)$ вып. все усл. теор. о ∃! реш ЗК для норм сист ОДУ, т.е. ∃! реш $(*)$ на $[a, b]$

9 Теор о $\exists!$ реш лин сист ОДУ и реш лин ОДУ n-го пор на отр.

Опр: лин ОДУ n-го пор — ОДУ вида:

$$a_0(t)y^{(n)}(t)+a_1(t)y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n(t)y(t)=f(t),$$ где $a_k(t)$ и $f(t)$ — заданные и непрерывн. на $[a,b]$ ф-ции и $a_0(t)\neq 0$ на $[a,b]$

Опр: ЗК для лин ОДУ n-го пор:

$$\begin{cases} a_0(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_n(t)y(t)=f(t) \\ y(t_0)=y_{01},\ y'(t_0)=y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0)=y_{0n} \end{cases} \quad t,t_0\in[a,b]$$

Теор для лин. ОДУ: Пусть в опр ЗК $a_k(t), f(t)\in C[a,b]$, $a_0(t)\neq 0\ \forall t$

Тогда $\exists!$ реш ЗК на $[a,b]$

▷ Перепишем ур-е из опр в виде:

$$y^{(n)}=\frac{f(t)}{a_0(t)}-\frac{a_n(t)}{a_0(t)}y-\ldots-\frac{a_1(t)}{a_0(t)}y^{(n-1)}(t)=g(t,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

$g(t,p_1,\ldots,p_{n-1})\in C(D_\infty)$, $D_\infty=\{t\in[a,b],\ (y_1,p_1,\ldots,p_{n-1})\in\mathbb{R}^n\}$

Производные g по $y_1,p_1,\ldots,p_{n-1}$ сущ и ограничс по модулю

$L=\max\limits_k \max\limits_{[a,b]}\left|\frac{a_k(t_0)}{a_0(t_0)}\right|$, т.е g удовл усл. Липш $\Rightarrow$ по теор о $\exists!$ реш ЗК для ОДУ n-го пор, разр отн $y^{(n)}$ $\exists!$ реш ЗК для лин ОДУ ◁

Опр: ЗК для лин. сист ОДУ (СЛДУ) наз:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(t)y_1+\ldots+a_{1n}(t)y_n+f_1(t) \\ \ldots \\ y_n'=a_{n1}(t)y_1+\ldots+a_{nn}(t)y_n+f_n(t) \\ y_1(t_0)=y_{01},\ \ldots,\ y_n(t_0)=y_{0n} \end{cases}$$

$t,t_0\in[a,b]$ где $f_k\in C[a,b]$, $a_{km}\in C[a,b]$ $k,m=\overline{1,n}$

Теор для СЛДУ: Пусть в опр ЗК $a_{km}, f_k\in C[a,b]$ $k,m=\overline{1,n}$. Тогда $\exists!$ реш ЗК

▷ Эта ЗК явл частн случ ЗК для норм сист ОДУ, причем правая часть в этой ЗК непр и удовл усл Липш. по $(y_1,\ldots,y_n)$ с константой $L=\max\limits_k\max\limits_{[a,b]}|a_{km}(t)|$ при $t\in[a,b]$, $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ для этой ЗК вып. все усл теор о $\exists!$ реш ЗК для норм сист ОДУ $\Rightarrow$ $\exists!$ ф-ции $y_1,\ldots,y_n$ явл реш этой ЗК на $[a,b]$ □

(10) Три теоремы об общ. св-вах лин ОДУ n-го пор.

Опр: лин. диф. опер n-го порядка — $a_0(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_n(t)y_n(t)$, где $a_k(t)\in C[a,b]$, $a_0(t)\neq 0$ $\forall t\in[a,b]$

Теор: Если $y_1,\ldots,y_n$ — реш. ур-ий $\mathcal{L}y_k=f_k(t)$, то $y(t)=\sum^{n} C_k y_k(t)$, $C_k\in\mathbb{C}$ явл реш $\mathcal{L}y=f(t)$, где $f(t)=\sum C_k f_k(t)$

▷ $\mathcal{L}y=\mathcal{L}\sum C_k y_k(t)=\sum C_k\mathcal{L}y_k(t)=\sum C_k f_k(t)=f(t)$ □

Следствие: л/к решений однород — реш. однород; разн. 2-х реш неоднор с одинак н.у — реш. однородного

Теор: Реш ЗК $\mathcal{L}y=f(t)$, $y(t_0)=y_{00},\ldots,y^{(n-1)}(t_0)=y_{0,n-1}$ представимо в виде $y(t)=v(t)+\omega(t)$, где $v(t)$ — реш. ЗК для неоднор. с нул. нач. усл: $\mathcal{L}v=f(t)$, $v(t_0)=0,\ldots,v^{(n-1)}(t_0)=0$, а $\omega(t)$ — реш ЗК для однор с ненул нач. усл: $\mathcal{L}\omega=0$, $\omega(t_0)=y_{00},\ldots,\omega^{(n-1)}(t_0)=y_{0,n-1}$

▷ $y(t)=v(t)+\omega(t)$ удовл неоднор. уравн в силу теор. выше. Нач усл: $y^{(k)}(t_0)=v^{(k)}(t_0)+\omega^{(k)}(t_0)=0+y_{0k}=y_{0k}$, $k=\overline{0,n-1}$ □

Теор: реш ЗК для однород ур-я $\mathcal{L}y=0$, $y(t_0)=y_{00},\ldots,y^{(n-1)}(t_0)=y_{0n-1}$ представл. в виде $y(t)=\sum\limits_{m=0}^{n-1}y_m(t)\cdot y_{0m}$, где $y_m(t)$ — реш ЗК: $\mathcal{L}y_m=0$, $y_m^{(m)}(t_0)=1$, $y_m^{(k)}(t_0)=0$ $(k\in\{0,1,\ldots,n-1\}\setminus\{m\})$

▷ $y(t)$ — реш однор как л/к реш $y_m(t)$ однор с пост коэф по теор 1 (отсюда). Нач условия:

$y^{(k)}(t_0)=\sum\limits_{m=0}^{n-1}y_m^{(k)}(t_0)y_0^{(m)}=y_k^{(k)}(t_0)y_{0k}=y_{0k}$, $k=\overline{0,n-1}$ □

⑪ Лин. завис и независ скаляр ф-ций. Определитель Вронского. Теор о необх усл. лин. завис скал. ф-ций. Примеры

Опр: Ф-ции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ наз линейно завис на $[a,b]$, если $\exists$ набор конст $C_1, \dots, C_n : \sum\limits_{k=1}^{n} |C_k| > 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_k(t) \equiv 0$ на $[a,b]$

Если из $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k y_k \equiv 0$ след, что $C_1 = C_2 = \dots = C_n$, то $y_i(t)$ – лнз на $[a,b]$

Пример: $\forall\ y_1 = t^2,\ y_2 = t|t|$

1) на $[0,2]$ – лз, т.к. $y_1 - y_2 \equiv 0$ 2) на $[-1,0]$ – лз, т.к. $y_1 + y_2 \equiv 0$

3) на $[-1,2]$ – лнз, т.к. из $C_1 y_1 + C_2 y_2 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 y_1(-\frac{1}{2}) + C_2 y_2(-\frac{1}{2}) = 0 \\ C_1 y_1(\frac{1}{2}) + C_2 y_2(1/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

Опр: $\exists\ y_1, \dots, y_n \in C^{n-1}[a,b]$. Определителем Вронского наз

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ y^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Теор о необ условии лз: $\exists\ y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$ и лз на $[a,b]$. Тогда $W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$

$\triangleright$ л/з $\Rightarrow \exists\ C_1, \dots, C_n : \sum |C_i| > 0$ и $C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \Rightarrow C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$
$\Rightarrow C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0 \Rightarrow$ СЛАУ относительно $C_1, \dots, C_n$ имеет нетривиал реш $\Rightarrow$ её опр $\equiv 0 \Rightarrow W[y_1, \dots, y_n] \equiv 0$ $\triangleleft$

Замечание: обратное неверно:

$\exists\ y_1 = t^2,\ y_2 = t|t|$ – лнз на $[-2,2]$, но $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} \equiv 0$

(12) Лин. зависим. и независим. решений лин. однород ОДУ n-го порядка. Теор об альтернативе для определ. Вронского

Теор Если $y_1, \dots, y_n \in C^{(n-1)}[a,b]$ и лз на $[a,b]$, то $W[y_1,\dots,y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$

▷ лз $\Rightarrow \exists C_1,\dots,C_n : \sum |C_i| > 0 : C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \equiv 0 \Rightarrow C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \equiv 0$

Сист имеет нетр. реш $(C_1,\dots,C_n)$ $\forall t \in [a,b] \Rightarrow \det = 0$

Замеч: $A \Rightarrow B \Rightarrow \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. **Дост усл лнз**: Если $\exists t_0 \in [a,b]$:
$W[y_1,\dots,y_n](t_0) \neq 0$, то $y_1,\dots,y_n$ – лнз на $[a,b]$

Теор об альтернативе: $\exists y_1,\dots,y_n$ лви реш $L[y]$ на $[a,b]$, причем (← лин.)
$a_k(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Тогда справедл. альтернатива:
- либо $W[y_1,\dots,y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$ и $y_1,\dots,y_n$ – лз на $[a,b]$
- либо $W[y_1,\dots,y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и $y_1,\dots,y_n$ – лнз на $[a,b]$

▷ $\exists t_0 \in [a,b]$: $W(t_0) = 0$

1) ∡ СЛАУ: $\begin{cases} y_1(t_0) C_1 + \dots + y_n(t) C_n = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) C_1 + \dots + y_n^{(n-1)} C_n = 0 \end{cases}$ $\det = W(t_0) = 0 \Rightarrow \exists$ нетрив реш $\tilde{C}_1,\dots,\tilde{C}_n : \sum |\tilde{C}_i| > 0$

∡ $y(t) = \sum \tilde{C}_k y_k$.

$L[y(t)] = 0$, $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0$. Эта задача имеет единств. реш на $[a,b]$, причем, очевидно, $y(t) \equiv 0$ – подходит. То есть, $\sum \tilde{C}_k y_k \equiv 0$ на $[a,b] \Rightarrow y_1,\dots,y_n$ – лз на $[a,b]$ и по теор о необх условии лз (билет 11): $W[y_1,\dots,y_n] \equiv 0$ на $[a,b]$

2) Если $t_0 \in [a,b]$: $W[t_0] \neq 0$, то по достат усл. лнз: $y_1,\dots,y_n$ лнз на $[a,b] \Rightarrow$ по (1) $W[y_1,\dots,y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$

(13) Фундаментальная система реш. лин. одн ОДУ n-го порядка. Теор о ∃ ФСР. Теор об общ. реш. лин. одн. ОДУ n-го.

Опр: Лин. однород ОДУ n-го порядка – ур-е вида:

$$L[y]=a_0(t)y^{(n)}(t)+\ldots+a_{n-1}(t)y'(t)+a_n(t)y(t)=0, \quad a_0(t)\neq 0$$

Опр: ФСР $L[y]$ на $[a,b]$ – набор из n лнз реш $L[y]=0$

Теор о ∃ ФСР: Пусть в $L[y]$ $a_k(t)\in[a,b]$, $k=\overline{0,n}$ $a_0(t)\neq 0$ $\forall t[a,b]$.

Тогда ∃ ФСР $L[y]=0$ на $[a,b]$

▷ Возьм $B\in\mathbb{C}^{n\times n}=\{b_{km}\}$: $|B|\neq 0$ и набор Задач Коши:

$L[y_1]=0$, $y_1(t_0)=b_{11},\ldots,y_1^{(n-1)}(t_0)=b_{n1}$

...

$L[y_n]=0$, $y_n(t_0)=b_{n1},\ldots,y_n^{(n-1)}(t_0)=b_{nn}$

По теор о ∃! реш ЗК для лин ОДУ n-го пор: ∃! набор $y_1(t),\ldots,y_n(t)$ – реш. этих задач. $W[y_1,\ldots,y_n](t_0)=|B|\neq 0\Rightarrow$ по теор об альтернативе для опр Вронского $y_1,\ldots,y_n$ лнз на $[a,b]$ ◁

Замеч: ФСР опр неоднозначно: меняем $B\Rightarrow$ меняем ФСР

Опр: Общим реш $L[y]=f(t)$ на $[a,b]$ наз $y(t,C_1,\ldots,C_n)$, где $C_1,\ldots,C_n$ – $\forall$ const, n – порядок $L[y]=f(t)$:

1) $L[y(t,C_1,\ldots,C_n)]=f(t)$ $\forall C_1,\ldots,C_n$

2) $\forall\tilde{y}(t): L[\tilde{y}]=f(t)$ $\exists\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n$ – конст : $\tilde{y}(t)=y(t,\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n)$

Теор об общ. реш Пусть $y_1,\ldots,y_n$ – ФСР $L[y]=0$ на $[a,b]$. Тогда общ. реш этого ОДУ на $[a,b]$ имеет вид $y_{oo}(t)=C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ $\forall C_k\in\mathbb{C}$

▷ Т.к. лин. комб однор ур-й – реш, то $\forall C_k$ ф-ция y_{oo} – реш.

Покажем, что $\forall$ реш $L[y]=0$ м.б. получ. выбором C_k. Пусть $\tilde{y}$ – нек. реш. Возьм СЛАУ

$$\begin{cases} C_1y_1(t_0)+\ldots+C_ny_n(t_0)=\tilde{y}(t_0) \\ C_1y_1^{(n-1)}(t_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(t_0)=\tilde{y}^{(n-1)}(t_0)\end{cases}$$

, где $t_0\in[a,b]$. det = опр. Вронского в t_0 и $\neq 0$ т.к $y_1,\ldots,y_n$ – лнз $\Rightarrow$ ∃ ед реш $\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n$

Возьм ф-цию $\hat{y}(t)=\sum\tilde{C}_ky_k(t)$

Эта ф-ция – реш $L[y]=0$. Т.к $\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n$ – реш СЛАУ, то $\hat{y}(t)$: $\hat{y}^{(k)}(t_0)=\tilde{y}^{(k)}(t_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow\hat{y}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ – реш $L[y]=0$ и удовл одним и тем же усл ЗК в $t_0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теор о ∃! реш ЗК. они совпад: $\tilde{y}(t)=\hat{y}(t)=\sum\tilde{C}_ky_k(t)$ ◁

(14) Теор об общ. реш лин неоднород ОДУ n-го пор. Метод вар пост.

Опр: Общ реш лин неоднор ОДУ n-го пор — зависимое от n произвольн постоянных решение этого ур-я такое, что ∀ другое реш этого ур-я мб получено из него в рез выбора др. знач постоян.

Теор об общ. реш.: Пусть в $L[y]=f(t)$ $a_k(t), f(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.
Тогда общ. реш. $L[y]=f(t)$ на $[a,b]$ явл $y(t) = C_1 y_1(t) + \dots + C_n y_n(t) + y_r(t)$
где $y_1, \dots, y_n$ — ФСР $L[y]=0$ на $[a,b]$, y_r — частн. реш $L[y]=f(t)$, $C_k \in \mathbb{C}$

▷ 1) $y(t)$ — реш $L[y]=f(t)$ как Σ реш $L[y]=0$ и реш $L[y]=f(t)$

2) Пусть $\forall \varphi(t)$ — реш $L[y]=f(t)$. Тогда $\varphi(t) - y_r(t)$ явл реш $L[y]=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теор об общ. реш однор. лин. ОДУ (билет 13):
$\exists \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_n : \varphi(t) = \hat{C}_1 y_1 + \hat{C}_n y_n + y_r$ ◁

Метод вариации постоянных:

(решаем сперва $L[y]=0$, затем $C_k \to C_k(t)$ и сост. сист. Решаем относ-но $C_k'(t)$, потом интегрир и подставляем)

Пусть $L[y]=f(t)$. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — ФСР $L[y]=0$. и $a_k(t), f(t) \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$
Будем искать реш $L[y]=f(t)$ в виде: $y(t) = \sum C_k(t) y_k(t)$, где $C_k(t) \in C[a,b]$
Пусть производн $C_k'(t)$ опр для $\forall t$ из СЛАУ

$$\begin{cases} C_1'(t) y_1(t) + \dots + C_n'(t) y_n(t) = 0 \\ C_1'(t) y_1'(t) + \dots + C_n'(t) y_n'(t) = 0 \\ C_1'(t) y^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t) y_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ C_1'(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t) y^{(n-1)}(t) = \dfrac{f(t)}{a_0(t)} \end{cases}$$

Определитель этой сист — $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ (т.к. $y_1, \dots, y_n$ — лнз как ФСР) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists!$ реш $C_k'(t) = g_k(t)$, $k = \overline{1,n} \Rightarrow$
$\Rightarrow C_k(t) = \int_{t_0}^{t} g_k(\tau) d\tau$

Таким образом:

$y_н'(t) = \sum C_k(t) y_k'(t)$

$y_н''(t) = \sum C_k(t) y_k''(t)$

$y_н^{(n-1)}(t) = \sum C_k(t) y_k^{(n-1)}(t)$

$y_н^{(n)}(t) = \sum C_k(t) y_k^{(n)}(t) + \dfrac{f(t)}{a_0(t)}$

Подставим $y_н$ в $L[y]$:
$L[y] = a_0(t) \dfrac{f(t)}{a_0(t)} + a_0(t) \sum C_k(t) y_k^{(n)}(t) + a_1(t) \sum C_k(t) y_k^{(n-1)}(t) +$
$+ \dots + a_{n-1}(t) \sum C_k(t) y_k'(t) = f(t) + \sum C_k(t) L[y_k] =$
$= f(t) + 0 = f(t)$ $t \in [a,b]$

$$\Rightarrow y_н(t) = C_1(t) y_1(t) + \dots + C_n(t) y_n(t) = \sum y_k(t) \int_{t_0}^{t} g_k(\tau) d\tau$$

(15) Лемма и теорема о построении ФСР для ОДУ n-го порядка с постоян. коэф

Теор] $L[y]$, $a_k(t)$, $a_0 \neq 0$.] Корнями $M(\lambda)$ явл λ_k кратности m_k $(k=\overline{1,s})$, $\sum_1^s m_k = n$. Тогда в кач-ве ФСР $L[y]=0$ можно взять ф-ции:
$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}$ $(k=\overline{1,s})$

▷ 1) Тк $\sum_1^s m_k = n$, то ф-ций столько, сколько надо

2) Покажем, что все они явл реш $L[y]=0$. Воспольз формулой:
$\forall g(t) \in C^{(n)}[a,b]$: $L[g(t)\cdot e^{\lambda t}] = e^{\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{g(t)\, m^{(k)}(\lambda)}{k!}$ (примем без док-ва)

] $p=\overline{0,m_k-1}$. Тогда $L[t^p e^{\lambda_k t}] = e^{\lambda_k t}\Big[\underbrace{\sum\limits_{l}^{m_k-1}\frac{(t^p)^{(l)}\cdot M^{(l)}(\lambda_k)}{l!}}_{\Sigma_1} + \underbrace{\sum\limits_{l=m_k}^{n}\frac{(t^p)^{(l)} M^{(l)}(\lambda_k)}{l!}}_{\Sigma_2}\Big]$

Так как λ_k – корень кратн m_k, то $M(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)^{m_k}\cdot g(\lambda) \Rightarrow$
$\Rightarrow M^{(l)}(\lambda)$ при $l=\overline{0,m_k-1}$ содерж скобку $(\lambda-\lambda_k) \Rightarrow M^{(l)}(\lambda_k)=0$
$\forall l = \overline{0,m_k-1} \Rightarrow \Sigma_1 = 0$

Так как $(t^p)^{(l)} = 0$ при $p \le m_{k-1}$, $l \geq m_k$, то $\Sigma_2 = 0$

Итак, $L[t^p e^{\lambda_k t}] \equiv 0$ $\forall p = \overline{0,m_k-1}$ $\forall k=\overline{1,s}$

3) Предположим, что ф-ции лз на $[a,b]$. Тогда $\exists$ набор конст: $C_1,\dots,C_n$: $\sum|C_k|>0$:
$\sum\limits_{l=0}^{m_1-1} C_{l+1} t^l e^{\lambda_1 t} + \dots + \sum\limits_{l=0}^{m_s-1} C_{n-m_s+1+l}\, t^l e^{\lambda_s t} \equiv 0$ на $[a,b]$, то есть,

$p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_s(t)e^{\lambda_s t} \equiv 0$ на $[a,b]$ $(*)$, где $p_k(t)$ – многочлен степени τ_k: $\tau_k \le m_k - 1$

Домножим $(*)$ на $e^{-\lambda_1 t}$ и продиффир. по t m_1 раз
Помним, что $(*) \Leftrightarrow Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + Q_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0$, где $Q_k(t)$ – многочл той же степ τ_k, что и исход $p_k(t)$ $(k=\overline{2,n})$
В частности, $Q_s(t) = b_s(\lambda_s-\lambda_1)^{m_1} t^{\tau_s} + \dots$,
Это так, потому что: $\left(p_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}\right)'_t = e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}\left[(\lambda_k-\lambda_1)p_k(t) + p_k'(t)\right]$
и тд вплоть до произв порядка m_k
$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + Q_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \equiv 0$ $(**)$

Домножим на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ и продиф m_2 раза, потом домножим получивш. на $e^{-(\lambda_3-\lambda_2)t}$ и продиф m_3 раза и тд

В итоге получим:

$$\underset{\neq 0}{b_s}\,\underset{\neq 0}{(\lambda_2-\lambda_1)^{m_1}}\,\underset{\neq 0}{(\lambda_3-\lambda_2)^{m_2}}\ldots\underset{\neq 0}{(\lambda_s-\lambda_{s-1})^{m_s}}\,t^{r_s}+\ldots\equiv 0 \text{ на } [a,b]$$

Но ненул. многочл не м.б $\equiv 0$ — ?!

$\Rightarrow$ ф-ции лнз $\Rightarrow$ ФСР на $[a,b]$ $\square$

(16) Теор о постр мин ОДУ n-го пор по задан. сист реш. и об однозн. определения ОДУ по ФСР. Формула Остроґр-Лиув.

Обозн: $L_a[y] = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t)$

Теор об однознач: Пусть в $L_a[y]$ $a_k(t) \in C[a,b]$ $(k=\overline{1,n})$. Тогда $L_a[y]=0$ однозн задается $\forall$ из своих ФСР

▷ Фиксир $\forall$ ФСР $L_a[y]=0$: $y_1, \dots, y_n$. Пусть $\exists L_b[y] \equiv y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_n y_n \equiv 0$, имеющ. ту же ФСР. Тогда $y_1, \dots, y_n$ – реш $L_a[y] - L_b[y] = 0$ на $[a,b] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1 - b_1)y^{(n)} + \dots + (a_n - b_n)y = 0$ $(**)$

Пусть $\exists t_0 \in [a,b]$: $a_1(t_0) \neq b_1(t_0)$. Тогда $\exists \delta > 0$: $a_1(t) - b_1(t) \neq 0$ $\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [a,b]$. Тогда $(**)$ уд. всем усл. теор об общ. реш. (билет 13) и при этом имеет n лнз реш, являясь ур-ем $(n-1)$-го порядка – ?!.

Таким обр. $a_1 - b_1 \equiv 0$ на $[a,b]$. Аналог: $a_k - b_k \equiv 0$ на $[a,b]$ $(k = \overline{2,n})$

$\Rightarrow L_a[y] \equiv L_b[y]$ □

Теор о построении: Пусть $y_1, \dots, y_n \in C^{(n)}[a,b]$ и $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Тогда $\exists$ лин. однор ОДУ n-го пор с непр. коэф и отлич. от нуля коэф при $y^{(n)}$, для котор $y_1, \dots, y_n$ – ФСР

▷ Расс (#):

$$(\#)\quad \begin{vmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) & y(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) & y'(t) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

, где $y(t)$ – произвольн ф-ция из $C^{(n)}[a,b]$. При разлож этого определит по послед. столбцу получ лин однор ОДУ n-го пор относ $y(t)$, причем при $y^{(n)}(t)$ коэф равен $W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и все коэф $\in C[a,b]$

При подстановке вместо $y(t)$ $\forall$ $y_k(t)$ слева получ опред с одинак k-ым и $(n+1)$-ым стб $\Rightarrow$ все y_k – реш этого ур-я. По теор об альтернативе (билет 12) $y_1, \dots, y_n$ лнз на $[a,b]$ $\Rightarrow$ образ ФСР этого ур-я □

Пример: постр лин. одн. ОДУ с непр коэф наим порядка, реш котор:

$y_1 = 1$, $y_2 = \cos 2t$, $y_3 = \sin^2 t$ $(t \in [1, 3/2])$

▷ Очев, что $y_2 = y_1 - 2y_3 \Rightarrow y_1, y_2, y_3$ – лз, при этом $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2t \\ 0 & -2\sin 2t \end{vmatrix} =$

$= -2\cos 2t \neq 0 \quad \forall t \in [1, 3/2]$

y_1, y_2 (и y_3 как л/к) явл реш

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2t & y \\ 0 & -2\sin 2t & y' \\ 0 & -4\cos 2t & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2t\, y'' + 4\cos 2t\, y' = 0 \Leftrightarrow y'' - 2\operatorname{ctg} 2t\, y' = 0$$ — лин. однор ОДУ порядка 2 $\square$

Формула Остроград - Лиувилля: $L[y]=0$, где $a_k \in C[a,b]$, $a_0(t) \neq 0$ $\forall t$

$$W[y_1,\dots,y_n] = W[y_1,\dots,y_n](t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right), \quad t, t_0 \in [a,b],\ y_1,\dots,y_n \text{ - ФСР } L[y]=0$$

вывод:

Правило выч. функциональн. производ: D - определитель n-го пор, D' - его производ, равн. Σ n опред., кажд из котор получен заменой одной из строк на строку из производ

$$W'[y_1,\dots,y_n] = \det\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

$\exists y_1,\dots,y_n$ - ФСР $L[y]=0 \Rightarrow L[y]=0$ однозн задается $\Rightarrow$

поделив (#) на $W[y_1,\dots,y_n]$ получим $L[y]=0 \Rightarrow a_1 = \frac{-W'}{W}$

Интегрир от t_0 до t:

$$W[y_1,\dots,y_n] = W[y_1,\dots,y_n](t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)d\tau\right) \quad t \in [a,b]$$

(17) Общ. теор однор. сист ОДУ. Теор об эквив сист ОДУ матричн. ОДУ. Св-ва реш. матриц ОДУ.

Опр: СЛДУ (сист. лин ОДУ):

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \iff \bar{y}' = A(t)\bar{y} + \bar{f}(t)$$

Опр: Пусть $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{n1}(t) \\ \ldots & & \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$

Пусть $Y(t)$ – матр $\{y_{kl}(t)\} \in C^1[a,b]$; $A(t) = \{a_{kl}(t)\} \in C[a,b]$, $B(t)$ – матр $\{b_{kl}(t)\} \in C[a,b]$. Тогда $Y' = AY + B$ – матричн. ОДУ

Теор об эквивал: $Y(t)$ – реш матричн ОДУ $Y' = AY + B \iff$ кажд стб $\bar{y}_k(t)$ матрицы $Y(t)$ явл реш. сист ОДУ $\bar{y}_k' = A\bar{y}_k + \bar{b}_k$; $\bar{b}_k$ – k-й стб B

▷ $Y' = AY + B \iff (\bar{y}_1', \ldots, \bar{y}_n') = (A\bar{y}_1, \ldots, A\bar{y}_n) + (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \iff \bar{y}_k' = A\bar{y}_k + \bar{b}_k$, $k = \overline{1,n}$ □

Теор (св-ва матричн ур-ий)

1) Если $Y(t)$ – реш $Y' = AY$, то $\forall \bar{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ ф-ция $\bar{y}(t) = Y(t)\bar{c}$ – реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ (линейность)

2) Если $Y(t)$ – реш $Y' = AY$, то $\forall B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ матр $X = YB$ – тоже реш $X' = AX$

▷ 1) $\bar{y}(t)\bar{c} = \sum c_k \bar{y}_k(t)$. По теор выше $\bar{y}_k$ – реш $\bar{y}' = A\bar{y} \Rightarrow$ по принципу суперпоз их л/к – тоже реш

2) $X' = (YB)' = Y'B + Y\underbrace{B'}_{0} = Y'B = AYB = AX$ □

18 Лин завис и независ вектор-функций. Опр Вронского. Теор о необх усл лин. завис. вектор-ф-ций. Примеры.

Опр: $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ наз л/з на $[a,b]$, если $\exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C} : \sum |c_k| > 0$:

$\sum c_k \bar{y}_k(t) \equiv 0$ на $[a,b]$

Если из $\sum c_k \bar{y}_k \equiv 0$ на $[a,b]$ следует, что $c_1 = \dots = c_m = 0$, то $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ наз лнз на $[a,b]$

Пример: $\triangleleft\ \bar{y}_1 = (t^2, t^3)$, $\bar{y}_2 = (t|t|, t^2|t|)$

1) на $[0,1]$: $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \equiv 0 \Rightarrow$ лз

2) на $[-1,0]$: $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \equiv 0 \Rightarrow$ лз

3) на $[-1,1]$: из $c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ лнз

Опр: Пусть $\bar{y}_k(t) \in C[a,b]$ $(k = \overline{1,m})$. Опр Вронского от ф-ций $\bar{y}_k(t)$ наз

$$W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n] = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \dots & & \dots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}, \text{ где } \bar{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{kk})$$

Теор (необ усл лз): Если $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_n(t)$ лнз на $[a,b]$, то $W \equiv 0$

▷ $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ - лнз $\Rightarrow$ стб в W - лз $\Rightarrow W \equiv 0$ □

Замеч. обратное неверно:

$\bar{y}_1(t) = (t^2, t^3)$, $\bar{y}_2(t) = (t|t|$. лнз на $[-1,1]$ но $W[\bar{y}_1, \bar{y}_2] =$

$= \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ t^3 & t^2|t| \end{vmatrix} \equiv 0$

19. Лин завис и независ реш лин одн сист ОДУ. Теор об альтернативе для опр. Вронского.

Теор об альтернативе: $\exists\, a_{kl}(t) \in C[a,b]$. Тогда для реш $\bar y_1, \dots, \bar y_n$ $y' = Ay$:

- либо $W[\bar y_1, \dots, \bar y_n] \equiv 0$ и $\bar y_1, \dots, \bar y_n$ лз на $[a,b]$
- либо $W[\bar y_1, \dots, \bar y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ и $\bar y_1, \dots, \bar y_n$ лнз на $[a,b]$

$\triangleright$ 1) $\exists\, t_0 \in [a,b]:\ W[\bar y_1, \dots, \bar y_n](t_0) = 0$

$\measuredangle$ $C_1 \bar y_1(t_0) + \dots + C_n \bar y_n(t_0)$ – СЛАУ относ $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}$

$W[\bar y_1, \dots, \bar y_n](t_0) = 0 \Rightarrow \exists$ нетрив реш $\hat C_1, \dots, \hat C_n : \sum |\hat C_k| > 0$ этой СЛАУ

$\measuredangle$ $\hat{\bar y}(t) = \sum C_k \bar y_k$: $\hat{\bar y}(t)$ – реш $(*)\begin{cases} \hat{\bar y}' = A\hat{\bar y} & \text{– л.к. реш} \\ \hat{\bar y}(t_0) \equiv 0 & \text{– по постр.} \end{cases}$

реш $(*)$ также явл $\bar\varphi(t) \equiv 0$. По теор о $\exists!$ реш ЗК для лин сист ОДУ (билет 9): $\hat{\bar y}(t) \equiv \bar\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow \bar y_1, \dots, \bar y_n$ лз на $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow W[\bar y_1, \dots, \bar y_n] \equiv 0$ по необх усл лз (билет 18)

2) $\exists\, t_0 \in [a,b]:\ W[\bar y_1, \dots, \bar y_n](t_0) \neq 0$, тогда $\bar y_1, \dots, \bar y_n$ лнз на $[a,b] \Rightarrow$

$W[\bar y_1, \dots, \bar y_n] \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$ $\square$

20 ФСР лин. однор. сист ОДУ. Теор о $\exists$ ФСР. Теор об общ. реш. лин однор. сист ОДУ. Матрицант

Опр: ФСР $\bar{y}'=A\bar{y}$ $(A=\{a_{km}(t)\}_{k,m=1}^{n})$ наз набор из n лнз на $[a,b]$ реш этой системы

Опр: Фундаментальной матрицей лин сист ОДУ $\bar{y}'=A\bar{y}$ на $[a,b]$ наз $\mathcal{Y}=(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$, где $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ – ФСР данной сист

Теор о $\exists$ ФСР: $\exists a_{kk}(t)\in C[a,b]$. Тогда на $[a,b]$ $\exists$ФСР $\bar{y}'=A\bar{y}$

$\triangleright$ $\measuredangle B\in\mathbb{C}^{n\times n}$: $\det B\neq 0$. $\measuredangle$ n ЗК:

$\begin{cases}\bar{y}'=A\bar{y}\\ \bar{y}(t_0)=b_k\end{cases}$, где b_k – k-й стб матр B $(k=\overline{1,n})$

По теор о $\exists!$ реш ЗК для лин сист ОДУ (билет 9): эти ЗК имеют ! реш на $[a,b]$: $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$, $W[\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n](t_0)=\det B\neq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{y}_1(t),\dots,\bar{y}_n(t)$ лнз на $[a,b]$ $\Rightarrow$ образуют ФСР $\square$

Замеч: ФСР опр неоднозн: другая $B\Rightarrow$ другая ФСР

Замеч: для $\bar{y}_1=(t^2,t^3)$, $\bar{y}_2=(t|t|,t^2|t|)$ $W\equiv 0$, но они лнз на $[-1,1]$

Это знач, что они не м.б. ФСР на $[-1,1]$ ни для одной лин однор. сист с непр коэф, т.к. они вообще не м.б. реш такой сист т.к иначе – противореч теор об альтернативе.

Опр: $\bar{y}(t,c_1,\dots,c_n)$ наз общим реш $\bar{y}'=A\bar{y}$ на $[a,b]$, если:

1) $\forall(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{C}^n$: $\bar{y}(t,c_1,\dots,c_n)$ – реш этой сист на $[a,b]$

2) $\forall\bar{\varphi}(t)$ – реш этой сист на $[a,b]$, $\exists\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_n$: $\bar{\varphi}(t)=\bar{y}(t,\hat{c}_1,\dots,\hat{c}_n)$

Теор об общ. реш: $\exists$ в $\bar{y}'=A\bar{y}$ $a_{km}(t)\in C[a,b]$. Тогда общ. реш этой сист явл $\bar{y}(t)=\sum C_k\bar{y}_k(t)$, где $C_k(t)\in\mathbb{C}=const$, $\bar{y}_k(t)$ – ФСР

$\triangleright$ 1) $\bar{y}(t)$ – реш $\bar{y}'=A\bar{y}$ как лин комб реш

2) Фиксир $\forall\bar{\varphi}(t)$ – реш $\bar{y}'=A\bar{y}$ и некотор. $t_0\in[a,b]$.

$\exists\ \mathcal{Y}(t)=(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$ – фундамент матрица

$\measuredangle$ СЛАУ $\mathcal{Y}(t_0)\bar{c}=\bar{\varphi}(t_0)$

$\det\mathcal{Y}(t_0)\neq 0$ т.к. $\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n$ – ФСР $\Rightarrow\exists!$ реш $\tilde{\bar{c}}$

$\measuredangle\ \tilde{\bar{y}}(t)=\sum\tilde{c}_k\bar{y}_k$. Эта ф-ция – реш $\begin{cases}\tilde{\bar{y}}'=A\tilde{\bar{y}}\\ \tilde{\bar{y}}(t_0)=\bar{\varphi}(t_0)\end{cases}$

реш которой явл и $\bar{\varphi}(t)\Rightarrow$ по теор о $\exists!$ реш ЗК: $\bar{\varphi}(t)=\sum\tilde{c}_k\bar{y}_k$ $\square$

Опр: Фунд. матрица $\bar{y}' = A\bar{y}$ – $Y = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, где $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ – ФСР

Опр: Матрициантом $\bar{y}' = A\bar{y}$ наз $Z(t, t_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)$, где $Y(t)$ – фунд матр для $\bar{y}' = A\bar{y}$

Q1) Теор об общ реш лин. неоднор сист ОДУ. Метод вар. пост

Опр: $\bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ наз общим реш $\bar{y}' = A\bar{y}$ на $[a,b]$, если:

1) $\forall (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n : \bar{y}(t, c_1, \dots, c_n)$ – реш этой сист на $[a,b]$

2) $\forall \bar{\varphi}(t)$ – реш этой сист на $[a,b]$, $\exists \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n : \bar{\varphi}(t) = \bar{y}(t, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n)$

Теор об общ. реш: Пусть $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}(t)$, где $a_{km}(t), \bar{f}(t) \in C[a,b]$. Тогда общ реш этой сист яви $\bar{y}(t) = \bar{y}_{oo}(t) + \bar{y}_{ч}(t)$, где $\bar{y}_{oo}(t)$ – общ. реш $\bar{y}' = A\bar{y}$, $\bar{y}_{ч}(t)$ – частн реш исход сист

▷ 1) $\bar{y}(t)$ – реш как л/к реш однор сист и реш неоднор

2) Фикс $\forall \bar{\varphi}(t)$ – реш $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}$

Тогда $\bar{\varphi}(t) - \bar{y}_{ч}(t)$ – реш $\bar{y}' = A\bar{y} \Rightarrow \exists \tilde{c} : \bar{\varphi} - \bar{y}_{ч} = \sum \tilde{C}_k \bar{y}_k$, $\bar{y}_k$ из $\bar{y}_{oo} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\varphi} = \sum \tilde{C}_k \bar{y}_k + \bar{y}_{ч} = \bar{y}_{oo} + \bar{y}_{ч}$ □

Метод вар постоян: Пусть $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{f}$, $a_{km}(t), \bar{f}(t) \in C[a,b]$. Тогда частн. реш этой сист яви ф-ция вида $\bar{y}_n(t) = \int_{t_0}^{t} Z(t_0, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau$, где $Z(t, \tau)$ – матрицант ($= Y(t) Y^{-1}(t_0)$), $t_0 \in [a,b]$

▷ Пусть $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ – ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$. Тогда общ реш однор сист – $\bar{y}(t) = \sum c_k \bar{y}_k = Y(t)\bar{C}$: $(Y(t)\bar{c}(t))' = A(Y(t)\bar{c}(t) + \bar{f}(t))$

$\cancel{Y'\bar{c}} + Y\bar{c}' = \cancel{(AY)\bar{c}} + \bar{f}$ (тк $Y' = AY$, тк $\bar{y}_k' = A\bar{y}_k$)

$\bar{c}' = Y^{-1}\bar{f}$. Тогда, например $C = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau$, где $t_0 \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}_n = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\bar{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\underbrace{Y(t)}_{\text{не завис от } \tau}\bar{f}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} Z(t, \tau)\bar{f}(\tau)d\tau$ □

(22) Теор о построен ФСР систем ОДУ с пост коэф в случае ∃ базиса из соб вект матрицы:

Теор о построен ФСР: Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $h_1, \dots, h_n$ – л.н.з соб вект A, отвеч соб знач $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда в кач-ве ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$ можно взять:

$\bar{y}_1 = \bar{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \bar{y}_n = \bar{h}_n e^{\lambda_n t}$

▷ 1) Ф-ций всего n

2) $(\bar{y}_k)' = (\bar{h}_k e^{\lambda_k t})' = \lambda_k \bar{h}_k e^{\lambda_k t} = (A\bar{h}_k) e^{\lambda_k t} = A(\bar{h}_k e^{\lambda_k t}) = A\bar{y}_k$

3) Возьм $[c,d]$: $[a,b] \subseteq [c,d]$, $t=0 \in [c,d]$, $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](0) = \det(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_n) \neq 0$

По теор об альтернативе $W[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n](t) \neq 0 \quad \forall t \in [c,d] \Rightarrow$ и $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теор об альтернативе $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ – л.н.з на $[a,b]$

$\Rightarrow$ данная сист образ ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$ ◻

23) Теор о построен. ФСР сист ОДУ с пост коэф в случае, когда нет базиса из соб. вект матр. сист

Теор.: $\exists$ в $\bar{y}' = A\bar{y}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и жорд. базис A состоит из цепочек векторов вида: $\bar{h}_{jl}^{1}, \dots, \bar{h}_{jl}^{p_{jl}}$, где $j = \overline{1, s_l}$, $\sum\limits_{j=1}^{s_l} p_{jl} = m_l$, $\bar{h}_{jl}^{1}$ – соб вект, а $\bar{h}_{jl}^{k}$ $(k = \overline{2, p_{jl}})$ – корневые, присоедин к $\bar{h}_{jl}^{1}$, отвеч. соб зн λ_l кратности m_l $(l = \overline{1,q})$, $\sum^{q} m_l = n$. Тогда в кач-ве ФСР $\bar{y}' = A\bar{y}$ можно взять:

$$\bar{y}_{jl}^{1}(t) = \bar{h}_{jl}^{1} e^{\lambda_l t}$$

$$\bar{y}_{jl}^{2}(t) = [t\bar{h}_{jl}^{1} + \bar{h}_{jl}^{2}] e^{\lambda_l t}$$

$$\bar{g}_{jl}^{(k)}(t) = \int_0^t \bar{g}_{jl}^{k-1}(\tau)\,d\tau + \bar{h}_{jl}^{k}$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}_{jl}^{k}(t) = \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}_{jl}^{1} + \dots + t\bar{h}_{jl}^{k-1} + \bar{h}_{jl}^{k}\right] e^{\lambda_l t}$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}_{jl}^{p_{jl}}(t) = \left[\frac{t^{p_{jl}-1}}{(p_{jl}-1)!}\bar{h}_{jl}^{1} + \dots + \bar{h}_{jl}^{p_{jl}}\right] e^{\lambda_l t}$$

$\triangleright$ 1) ф-ций ровно n

2)
$$(\bar{y}_{jl}^{k}(t))' = e^{\lambda_l t}\Big[\underbrace{\lambda_l \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}_{jl}^{1}}_{=A\bar{h}_{jl}^{1}} + \underbrace{\lambda_l \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\bar{h}_{jl}^{2} + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!}\bar{h}_{jl}^{1}}_{=\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}A\bar{h}_{jl}^{2}} + \dots + \underbrace{\lambda_l \bar{h}_{jl}^{k} + \bar{h}_{jl}^{k-1}}_{=A\bar{h}_{jl}^{k}}\Big] =$$

$$= A\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar{h}_{jl}^{1} e^{\lambda_l t} + \dots + \bar{h}_{jl}^{k} e^{\lambda_l t}\right) = A\bar{y}_{jl}^{k}(t)$$

3) $\exists [c,d]: [a,b] \subseteq [c,d]$, $t = 0 \in [c,d]$. Опр Вронского по постр сист при $t=0$ совп. с опр матр, стб которой явл вект из Жорд баз $\Rightarrow \neq 0$. По теор об альтерн. $W \neq 0$ $\forall t \in [c,d] \Rightarrow W \neq 0$ $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ постр ф-ции ЛНЗ на $[a,b] \Rightarrow$ образуют ФСР $\square$